Étude du biais de l'arithmétique stochastique sur la méthode d'intégration des rectangles.

El-Mehdi El Arar* , Pablo De Oliveira Castro[1], Devan Sohier[2], Bruno Lathuilière[3], Eric Petit , and David Defour

[1]Laboratoire dÍnformatique Parallélisme Réseaux Algorithmes Distribués – Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines – France

[2]Parallélisme, Réseaux, Systèmes d'information, Modélisation (PRISM) – CNRS : UMR8144, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines (UVSQ) – 45 avenue des Etats-Unis Bâtiment Descartes 78035 Versailles CEDEX, France

[3]EDF RD – EDF Recherche et Développement – 7 Avenue Gaspard Monge, 91120 Palaiseau, France

Résumé

Les opérations sur des nombres à virgules flottantes (nous utilisons leur représentation la plus commune, décrite par la norme IEEE-754), limitées par la taille de leur représentation, ne sont pas exactes. Lors de longs calculs comme ceux que l'on rencontre en analyse numérique, ces erreurs s'accumulent et peuvent amener à des résultats faux. De plus, lorsque l'on parallélise ces calculs, l'ordre des opérations peut changer d'une exécution à l'autre, et les résultats ne sont alors plus reproductibles.

Pour traiter ce problème, on peut utiliser les méthodes d'arithmétique stochastiques, qui considèrent ces événements comme des perturbations aléatoires des calculs. L'erreur introduite est choisie pour simuler l'erreur d'approximation des calculs avec la norme IEEE-754.

En premier lieu, on s'intéresse aux distributions des résultats d'un calcul mené en arithmétique stochastique, et à la manière de les utiliser pour estimer l'erreur numérique. Comme premier cas d'étude nous avons choisi d'étudier le problème du calcul d'intégrale par la méthode des rectangles en comparant deux modes d'arrondi stochastiques (**up-or-down** et nearness) pour différentes fonctions ; nous nous intéressons en particulier au biais de la distribution.

Pour la fonction constante f(x)=1 sur [0;1], pour le mode nearness on n'a pas de biais : les résultats sont centrés autour de la valeur exacte égale à 1. Pour le mode **up-or-down**, on donne une expression exacte du biais, on montre qu'il est constant entre deux puissances successives de la base, ne dépends que de N et de l'intervalle d'intégration, et que son amplitude maximale augmente avec N.

Une autre fonction permettant d'illustrer la problématique est la fonction f(x)=cos(x) sur [0;$\pi/2$] qui combine plusieurs sources d'erreurs. On a toujours un biais pour le mode **up-or-down** qui augmente avec N et qui dépend des opérations arithmétiques et de la méthode utilisée dans le code; on explique l'origine de ce biais à partir de l'exemple de la fonction constante. En outre, une formule exacte est proposée pour distinguer l'erreur de méthode et

*Intervenant

l'erreur de calcul.

Bien que ces problèmes soient classiques, ils contiennent déjà toutes les difficultés inhérentes à ce type de calcul et permettent d'illustrer quelques propriétés de l'arithmétique stochastique.